Sequência de Fibonacci: Estudo de propriedades interessantes sobre a sequência

Igor de Barros Nonato[1]

RESUMO

O objetivo do minicurso é apresentar propriedades, teoremas e identidades a respeito da sequência de Fibonacci. Tais como: Lei de formação, Identidade de d'Ocagne, Identidade de Cassine, Fórmula de Binet, Teorema das diagonais inversa de Pascal, Teorema de Zeckendorf e o Limite Kepler-Simson. A metodologia será de aula expositiva em quadro branco. O minicurso serve como uma introdução ao mundo dessa sequência, "criada" no século XII e que ainda hoje é alvo de muita pesquisa sobre a mesma, com novos resultados interessantes sendo descobertos todos os dias. O inscrito ganhará também uma apostila contendo uma lista de exercícios para treinar e aperfeiçoar os conhecimentos adquiridos neste minicurso.

Palavras-chave: Sequência-de-Fibonacci; Números-Reais; Matemática.

1 INTRODUÇÃO

> "Leonardo Fibonacci foi um grande matemático europeu na época da Idade Média. Nasceu na Itália, em 1175, na cidade de Pisa, razão esta pela qual ficou conhecido também como Leonardo de Pisa. Fibonacci não era seu sobrenome propriamente dito, mas o diminutivo "Fillius Bonacci", que significava "filho de Bonaccio".
>
> ZAHN, Maurício, 2011, p. 1

Em o seu primeiro livro, que Fibonacci escreveu, *Liber Abaci* (Livro do Ábaco), cujo título que não condiz com o conteúdo da obra, publicado em 1202, apresenta em seu Capítulo 12, o seguinte problema:

> "Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?"
>
> RAMOS, Marcos Gertrudes Oliveira, 2013, p. 5

[1] UFPE, igor_nonato1010@hotmail.com

Porém foi Edouard Lucas, na sua Coleção *Récréations mathématiques*, por "batizar" o nome Fibonacci, a sequência de números que aparece como solução para o problema da reprodução de coelhos.

A Sequência de Fibonacci é um dos objetos mais interessantes, podendo ser apresentado ao ensino básico devido à sua simplicidade e nitidez nos enunciados. E sempre está presente em questões de olimpíadas de matemática.

O minicurso pode vim a ajudar ao professor, que poderá, em um eventual momento, precisar a lecionar uma aula com um objetivo especifico de resolver questões de olimpíadas, a fim de preparar seus alunos para fazer a prova.

2 DESENVOLVIMENTO

Inicialmente será apresentado a Lei de formação da sequência:

$$F_1 = F_2 = 1, \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \forall n \geq 2$$

Em seguida, se inicializará a discussão sobre as algumas propriedades que essa Lei de Formação carrega. Exemplos:

I) Soma dos n primeiros Números de Fibonacci;

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{n-1} + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

II) Soma dos quadrados dos n primeiros Números de Fibonacci;

$$F_1{}^2 + F_2{}^2 + F_3{}^2 + \cdots + F_{n-1}{}^2 + F_n{}^2 = \sum_{i=1}^{n} F_i{}^2 = F_n F_{n+1}$$

III) Soma dos Números de Fibonacci de ordem par;

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2(n-1)} + F_{2n} = \sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

IV) Soma dos Números de Fibonacci de ordem ímpar;

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2(n-1)-1} + F_{2n-1} = \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$$

V) Número de Fibonacci de ordem m mais n.

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}$$

Depois falaremos sobre os números de Fibonacci de índices negativos, que se dá pela lei: $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$, com o objetivo é chegar até a Identidade d'Ocagne:

$$(-1)^n F_{m-n} = F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1}$$

Continuando será introduzindo o conceito de Sequencias de Fibonacci, que possui a mesma de Lei de Formação da original, porém os dois primeiros termos são naturais quaisquer. O objetivo é chegar a uma função que gere todos esses números, em especial, a Formula de Binet:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \overline{\varphi}^n}{\sqrt{5}}, \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; e \; \bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

E em seguida demostrar a Identidade de Cassine:

$$(-1)^n = F_{n-1}F_{n+1} - {F_n}^2$$

A sequência desse minicurso apresentará dois teoremas, que são os mais complexos até aqui. O primeiro, a respeito sobre as diagonais do Triângulo de Pascal:

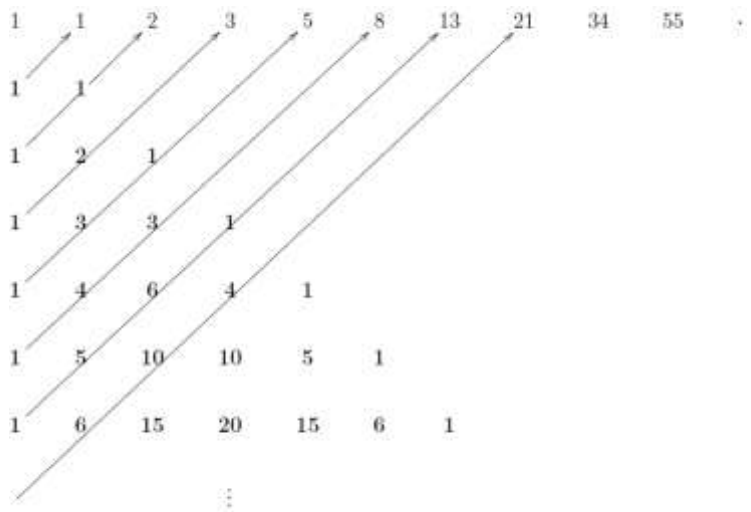

Figura 1: Triângulo de Pascal

Fonte: CANDEIA, Gustavo Costa, 2015, p. 12

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i}$$

O segundo, fala sobre o Teorema de Zeckendörff. De acordo com Muniz Neto (2013), “Todo inteiro positivo pode ser escrito como soma de números de Fibonacci distintos e não consecutivos”.

E finalizando, este minicurso falaremos sobre o Limite Kepler-Simson:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

Apresentando a demonstração parcial de Simson sobre esse limite.

3 CONSDERAÇÕES FINAIS

O estudo sobre a sequência de Fibonacci não é linear. Então espera-se que o inscrito possa, a partir dos conhecimentos adquiridos aqui, pesquisar mais sobre essa sequência, por onde tiver mais afinidade.

Também espera-se que os participantes do minicurso sejam capazes de resolver a lista de exercícios que será deixado a cada um deles, para que, além de assimilar o conteúdo e aperfeiçoar o que aprendera, ele possa repassar esse conhecimento em sala de aula para atuais ou futuros alunos.

4 REFERÊNCIAS

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. ***Tópicos de Matemática Elementar****: Números reais, 2º ed, Vol. 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.*

CANDEIA, Gustavo Costa. **Ordem de Aparição na Sequência de Fibonacci**: Um problema sobre divisibilidade*, Dissertação (Mestrado - Mestrado em Matemática), Universidade de Brasília, Brasília, 2015.*

RAMOS, Marcos Gertrudes Oliveira. **Sequência de Fibonacci e o número de ouro***, Dissertação (Mestrado – Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional), Universidade Estadual de Santa Cruz, Santa Cruz, Bahia, 2013.*

ZAHN, Maurício. (2011). **Sequência de Fibonacci e o número de ouro***. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2011.*