Relações entre a integral simples e o centro de massa: a integral simples como método facilitador no cálculo do centro de massa de corpos bidimensionais e tridimensionais

Diego Jonata de Medeiros[1]

Pedro Felix da Silva Júnior[2]

Adonias Victor Marques Barros[3]

RESUMO

A interdisciplinaridade da Física com a Matemática é totalmente possível, já que a Física utiliza-se da matemática para compreender diversos fenômenos da natureza. Diante disto, nosso objetivo é buscar de uma forma sucinta determinar o centro de massa da superfície esférica e do volume da esfera, utilizando um método apresentado nos primeiros períodos de um curso de cálculo: a integral simples. A integral simples por si só é uma ferramenta de grande importância em diversas aplicações, em especial, no cálculo do centro de massa. O conteúdo do minicurso será trabalhado de uma forma bastante matemática, com demonstrações e aplicações. Outras aplicações serão propostas para os participantes resolverem, com o intuito de avaliar se os mesmos compreenderam os métodos empregados.

Palavras-chave: Interdisciplinaridade. Centro de massa. Integrais.

1 INTRODUÇÃO

O Centro de Massa de um sistema de partículas segundo Halliday (2009, p. 207) “[...] é o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto.”.

A relevância desse tema na matemática é dada pelo fato de que, além de ser um tema usado na geometria espacial quando se é definido centro de gravidade em um campo gravitacional uniforme, pois em um campo gravitacional uniforme o centro de massa e o centro de gravidade se coincidem, as abordagens do mesmo através de experimentos são simples e muitas vezes o assunto é tratado na sala de aula como um simples tópico sem tanta importância, ou ainda, é tratado apenas pelo viés físico. Na física esse ponto (centro de massa) é de imprescindível importância na dinâmica de um sistema de partículas, seja ele discreto ou contínuo.

[1] UFPE - CAA, diegojonatagtape@hotmail.com.
[2] UFPE - CAA, pedrofelix2323@gmail.com.
[3] UFPE - CAA, adoniasvictor16@gmail.com.

O nosso objetivo geral é incentivar a interdisciplinaridade da Física com a Matemática, mostrando a matemática que está por trás do conceito de centro de massa de corpos rígidos. Nossos objetivos específicos visam de uma forma sucinta determinar o centro de massa utilizando um método apresentado nos primeiros períodos do curso de graduação de Licenciatura em Matemática ou Física, na disciplina de cálculo I: a integral simples. São eles:

- Investigar a importância da integral simples para a determinação do centro de massa de formas geométricas bidimensionais e tridimensionais (corpos superficiais e corpos volumétricos).
- Analisar os sólidos geométricos, em especial a esfera, com o intuído de não apenas mostrar a fórmula de como calcular o seu centro de massa, mas também, mostrar a importância de se usar coerentemente a integral para o seu achado.
- Contemplar a operacionalização da ferramenta da integral, juntamente com o arcabouço teórico a respeito do centro de massa, levando a fusão dos dois campos, o da matemática e o da física, para facilitação e as deduções que envolvem centro de massa em um curso superior de dinâmica.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 Sistema Discreto

Consideramos um ponto obtido por uma ponderação, como se o somatório de todas as forças externas estivessem atuando no mesmo. Este tipo de ponto tem grande importância no estudo da dinâmica de um sistema de partículas, por isso, ele será calculado com o uso detalhado e abrangente da ferramenta advinda do cálculo: a integral. Queremos facilitar e mostrar a importância da integral no cálculo do centro de massa de um corpo rígido arbitrário.

Nosso objetivo, como exposto anteriormente, é o tratamento e a operacionalização do cálculo do centro de massa de corpos rígidos, de tal forma que estaremos nos atendo a sistemas contínuos de distribuição de massa, juntamente com a explanação do cálculo das integrais nesse contexto. Antes abordaremos sistemas discretos de distribuição de massa para a compreensão do conceito físico e fundamental do ponto denominado de centro de massa de um sistema.

Para um sistema discreto de distribuição de massa, temos os seus constituintes ocupando posições bem definidas no espaço, e a expressão que nos fornecerá o centro de massa $\vec{R}$ de um sistema composto por n constituintes de massa $m_1, m_2, ..., m_n$, será:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i \ ,$$

onde as posições dos n constituintes são definidas pelos seus respectivos vetores de posição $\vec{r}$. Denotaremos $\sum_{i=1}^{n} m_i$ = M, onde M é a massa total do sistema, com o objetivo de simplificar nossas manipulações algébricas.

2.2 Sistema Contínuo

Na realidade física e no nosso dia a dia, muito raramente iremos lidar com sistemas discretos de distribuição de massa. Isso ocorre simplesmente porque a natureza nos fornece corpos e objetos que são, em sua essência, sistemas contínuos de distribuição de massa, desde uma forma geométrica abstrata, com as quais iremos trabalhar, como uma esfera, até a um objeto físico genérico e de complexa descrição matemática. Por sua vez, um sistema contínuo apresenta constituintes que não dotam de posições no espaço bem definidas, portanto, a determinação do centro de massa desses sistemas dispersos será dada pelo uso da expressão:

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int rdm$$

Interpretemos "dm" como um elemento de massa infinitesimal do sistema, o integrando r como o vetor posição associado ao elemento "dm" do sistema e M como a soma de todos os elementos de massa do sistema, em questão.

Pelo fato de estarmos trabalhando com corpos rígidos, de duas a três dimensões espaciais, é trivial que abordemos o calculo das coordenadas espaciais dos seus respectivos centros de massa. Denotando por $\vec{R} = \langle r_x, r_y, r_z \rangle$ o vetor posição do centro de massa (ponto), teremos que este centro de massa terá três coordenadas, em outras palavras, terá um $r_x, r_y \ e \ r_z$.

Analogamente, é fácil ver que:

$$r_x = \frac{1}{M}\int xdm \qquad r_y = \frac{1}{M}\int ydm \qquad r_z = \frac{1}{M}\int zdm$$

2.3 A Integral Simples e o Cálculo da Área da Superfície

Será estabelecido o exemplo da forma geométrica esfera como nosso guia para a construção operacional e conceitual, daqui em diante. A escolha se deve a facilidade e familiaridade de se trabalhar com esferas em diversas áreas da matemática. Dada a curva C com equação $x^2 + y^2 = r^2$, r uma constante real maior que zero. Tomaremos y como uma função de x, e utilizaremos a curva y = $\sqrt{r^2 - x^2}$ (metade positiva da curva C, que descreve a circunferência de centro na origem do sistema de coordenadas e de raio r).

Após rotacionar a curva C em torno do eixo dos “x”, observe que o sólido gerado é uma esfera E, como pode ser visto na Figura 1.

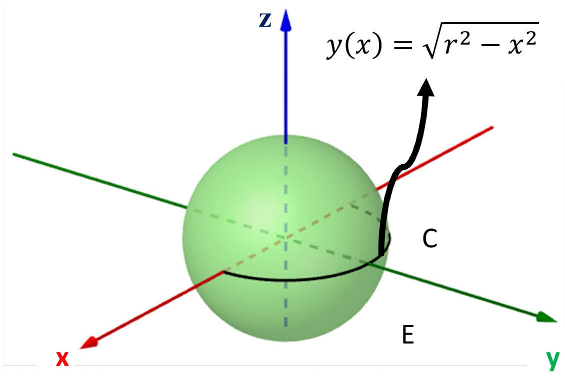

Figura 1. Semicircunferência rotacionada em torno do eixo dos “x”.

A fórmula da área da superfície esférica dada pela rotação da curva C em torno do eixo dos “x” é dada por:

$$\boldsymbol{Área = 2\pi \int_{-r}^{r} y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}$$

2.4 A Integral Simples e o Cálculo do Volume de Um Sólido de Revolução

Tomando a esfera representada na secção 2.3 (Figura 1), como motivação para o cálculo do volume de uma esfera qualquer, será utilizado novamente a integral simples e os seus artifícios para tal.

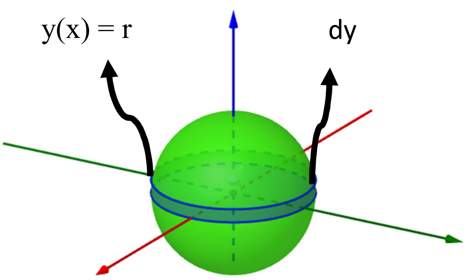

Figura 2. Secção cilíndrica de raio y(x) e altura dy, tomada a partir de fatia da esfera E (Figura 1).

Ao fatiarmos a esfera (Figura 1) em cilindros, como representado ao lado (Figura 2) e observarmos como os volumes desses cilindros variam em função de um eixo perpendicular à secção transversal, podemos aproximar o volume da esfera pela soma dos volumes dados por muitos desses cilindros. Denotando y(x) como sendo a área da secção transversal do sólido calculada para cada valor de x. Sendo a e b os valores de mínimo e máximo para x, respectivamente.

Dessa forma, o cálculo do volume de um sólido de revolução é dado através de uma integral simples, o qual é dado pela expressão:

$$\boldsymbol{Volume = \pi \int_a^b y(x)dy.}$$

2.5 A Integral Simples Estendida Para o Cálculo de Áreas e Volumes de Formas Geométricas e o Centro de Massa

Como já sabemos que o vetor centro de massa é determinado por,

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm$$

,

resta-nos saber quem é o elemento infinitesimal de massa, como ele será operacionalizado na integral e como podemos utilizar a integral simples para o cálculo do centro de massa de formas geométricas mais gerais que a esfera. Contudo, como foi mostrado nas secções 2.3 e 2.4, as expressões que nos fornecem o cálculo da área de uma superfície tomada pela rotação de uma curva sobre um eixo (eixo dos "x") e o volume de uma superfície subdividida em infinitos cilindros, são respectivamente:

$$\boldsymbol{Área = 2\pi\int_{-r}^{r} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad ; \quad Volume = 2\pi\int_{0}^{r}(r^2-x^2)dx}$$

Em ambos os casos, os corpos (bidimensionais ou tridimensionais) podem ser obtidos a partir de rotações em torno de eixos, formando assim objetos (superfícies/sólidos) simétricos em relação ao eixo de rotação. Portanto, basta descobrir o centro de massa em relação à variável do eixo de rotação (simetria), achando assim o centro de massa de todo o sistema, considerando a densidade da distribuição de massa do sistema constante.

Tomamos $\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A}\ e\ \rho = \frac{dm}{dv} = \frac{M}{V}$, onde σ e ρ são nomeadas as densidades superficiais e volumétricas de massa, respectivamente. Expressamos o elemento "dm" como a multiplicação do elemento infinitesimal (dA ou dV) pela respectiva densidade do elemento e aplicamos a igualdade que define o centro de massa $\vec{R} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm$.

Para a esfera E:

$$r_x = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{1}{M}\int x\sigma dA = \frac{1}{M}2\pi\int x\sigma y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$r_x = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{1}{M}\int x\rho dV = \frac{1}{M}\pi\int x\rho(r^2-x^2)dx$$

Assumimos por fim os limites de integração da esfera para ambos os casos (de área e volume) e computamos o vetor $\vec{R} = (r_x, r_y, r_z)$ que nos dará o centro de massa da esfera E. O raciocínio para a determinação de $r_y\ e\ r_z$ é análogo ao de r_x.

Para corpos que obedecem à formação das secções 2.3 e 2.4, de área e volume, as expressões generalizadas para o cálculo do centro de massa são dadas por:

$$r_w = \frac{1}{M}\int wdm = \frac{1}{M}\int w\sigma dA = \frac{1}{M}2\pi \int_{x_o}^{x_1} w\sigma f(x)\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$r_w = \frac{1}{M}\int wdm = \frac{1}{M}\int w\rho dV = \frac{1}{M}\pi \int_{x_o}^{x_1} w\rho f^2(x)dx$$

Onde r_w é uma coordenada arbitrária que se é desejado calcular do centro de massa.

É completamente intuitivo que o centro de massa da esfera E, como o ponto que se comporta como aquele que concentra toda a massa do sistema, tanto em relação à superfície quanto ao seu volume, seja o ponto da origem do eixo de coordenadas.

Pois bem, faremos o cálculo de $r_x$da esfera E, para o seu volume, e pela simetria da esfera este resultado será estendido a r_y e a r_z. Notemos que

$$r_x = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{1}{M}\int x\rho dV = \frac{1}{M}\pi\int x\rho(r^2 - x^2)dx$$

Para a esfera E, temos,

$$r_x = \frac{1}{M}\pi \int_{-r}^{r} x\rho(r^2 - x^2)dx.$$

Tomando ρ como uma constante,

$$r_x = \frac{1}{M}\pi \int_{-r}^{r} x\rho(r^2 - x^2)dx \Leftrightarrow r_x = \frac{1}{M}\pi\rho \int_{-r}^{r} x(r^2 - x^2)dx$$

e realizando a primitivação, obtemos,

$$r_x = \frac{1}{M}\pi\rho \left[-\frac{1}{2}(r^2 - x^2\right]\Big|_{-r}^{r} = 0.$$

Portanto, pelo exposto acima, tanto r_x, r_y e r_z obterão o mesmo resultado e o vetor posição do centro de massa $\vec{R}$ da esfera E como uma forma volumétrica será o vetor nulo, ou seja

$$\vec{R} = \langle 0,0,0\rangle \ ou \ \vec{R} = \vec{0}.$$

O método de integral no cálculo do centro de massa é uma ferramenta essencial para a obtenção do centro de massa de corpos rígidos. Notar esta importância é fundamental quando se está ensinando centro de massa para os alunos de uma disciplina de um curso superior de Matemática, pois assim poderá despertar um interesse maior por parte deles.

3 REFERÊNCIAS

- HALLIDAY, RESNICK, WALKER; Fundamentos da Física, Vol. 2, 8ª Edição, LTC, 2009.