CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE E SEU USO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DO COTIDIANO

Jean Martins de Arruda Santos[1]

Edelweis José Tavares Barbosa[2]

Marcos Luiz Henrique[3]

Resumo: Este minicurso tem como objetivo abordar a ideia de proporcionalidade, com ênfase na formação de seu conceito. Em um primeiro momento, buscamos o desenvolvimento do raciocínio de proporção entre grandezas e, após isso, o seu uso na resolução de problemas do cotidiano. Assim, neste minicurso, procuramos abordar alguns resultados concernentes à teoria Matemática e, em seguida, fazer aplicações através da resolução de situações-problema. Para isso, apresentamos alguns problemas motivadores para a exploração do conceito desejado. Neste sentido, pretendemos mobilizar os participantes no que diz respeito à formação do pensamento sobre proporcionalidade por um viés dinâmico e que possibilite à compreensão do tema.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Resolução de problemas. Proporcionalidade.

1 INTRODUÇÃO

É importante desenvolver nos estudantes a capacidade de aprender de modo que possam se adequar às diversas situações do cotidiano escolar (ou fora dele) e que envolvam desafios aos quais eles precisam resolver. Neste sentido, é relevante que no contexto educacional os professores promovam um ensino de Matemática que valorize a resolução de problemas como um recurso metodológico poderoso na promoção da aprendizagem Matemática.

De acordo com Brousseau (1997, apud ALMOULOUD, 2007) o aluno aprende através do processo de adaptação ao meio que possui dificuldades e contradições, uma vez que a construção do conhecimento se concretiza pela capacidade deste de resolver os problemas que constantemente surgem. Tendo isso em vista, é de suma importância que no processo didático o professor organize um meio que possibilite o desenvolvimento de situações que provoquem a aprendizagem dos alunos. Também é importante ressaltar que

[1]Licenciando em Matemática pelo Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco (CAA-UFPE). E-mail: martinsarruda57@gmail.com

[2]Professor Assistente do Núcleo de Formação Docente do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco (NFD-CAA-UFPE). E-mail: edelweisb@yahoo.com.br

[3]Professor Adjunto do Núcleo de Formação Docente do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco (NFD-CAA-UFPE). E-mail: profmclh@hotmail.com

> Para que esse processo se desenvolva plenamente, o ensino de Matemática deve primeiramente favorecer um ambiente de aprendizagem que simule na sala de aula uma comunidade matemática, onde todos possam participar, opinar, comunicar e trocar informações e experiências (SMOLE, s.d., p. 2).

Dessa forma, o aluno deve aprender por vontade própria, se envolvendo ativamente no processo de aprendizagem. Para tanto, é relevante que o professor, como coordenador do processo de ensino e aprendizagem, valorize as situações didáticas que permitam o aluno observar, refletir, conjecturar e tirar suas conclusões por conta própria e, assim, construa seus conhecimentos matemáticos.

Nessa perspectiva, desenvolvemos o presente Minicurso onde utilizamos a resolução de problemas como recurso metodológico potencializador da aprendizagem de proporcionalidade. Decidimos abordar o referido tema, uma vez que se trata de algo bastante relacionado com o cotidiano dos estudantes, porém ainda pouco explorado na Educação Básica. Além disso, a noção de proporcionalidade é bem antiga e possui uma inestimável utilidade, com diversas aplicações na Matemática, Física, Astronomia e também no cotidiano das pessoas, daí a importância de seu ensino (LIMA, 1987).

Em vista disso, pretendemos com o Minicurso discutir os problemas envolvendo proporcionalidade por um viés dinâmico e, ao mesmo tempo, mantendo a formalidade Matemática necessária para a formulação e desenvolvimento dos conceitos.

2 MÉTODOS E RECURSOS DIDÁTICOS

O minicurso, com duração de quatro horas, foi preparado para um público de 20 pessoas. Este, por sua vez, será composto em duas partes: uma de fundamentação teórica, em que será abordado o tema proporcionalidade, e outra prática, assim determinadas:

1) Parte teórica: constará da abordagem do tema proporcionalidade entre grandezas de maneira expositiva visando o desenvolvimento do pensamento matemático dentro de um contexto amigável aos participantes;
2) Parte prática: será proposta aos participantes uma seção de resolução de problemas que abordem a temática proporcionalidade, onde poderão resolvê-los em grupo ou até mesmo individualmente.

Na parte prática, temos a pretensão de levar os participantes a usarem de forma correta e estratégica os conceitos na resolução dos problemas propostos. Neste sentido, espera-se que os cursistas raciocinem em busca de uma maior aprendizagem.

Os recursos didáticos a serem utilizados são: data Show, quadro branco e folhas de papel A4.

3 GRANDEZAS PROPORCIONAIS E PROPORCIONALIDADE

Chamamos de *grandeza* tudo aquilo que pode ser medido. Por exemplo, a distância percorrida por um carro em um determinado intervalo de tempo representa uma relação entre duas grandezas, a saber: distância e tempo.

A seguir discutiremos o conceito de proporcionalidade e alguns resultados a ele relacionados.

3.1 Proporcionalidade

O conceito de proporcionalidade é bastante importante para a compreensão de diversos fenômenos envolvendo quantidades tanto na Matemática quanto em áreas afins. Trata-se de uma relação entre duas variáveis, ou ainda, de uma relação entre duas grandezas.

Do ponto de vista matemático, a proporcionalidade entre duas grandezas $a\ e\ b$ é uma função que nos diz de que forma $a\ e\ b$ estão relacionados. Suponhamos que $a\ e\ b$ sejam duas grandezas que estejam relacionadas de tal forma que a cada valor de a corresponda um único valor de b. Dessa forma, dizemos que b é função de a e escrevemos $b = f(a)$.

Vamos supor que a grandeza b seja função da grandeza a. Como foi definido anteriormente, escrevemos $b = f(a)$. De acordo com Lima (1987) a grandeza b é dita *diretamente proporcional* à grandeza a quando: I) b é função crescente de a, isto é, dados $a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2)$; e II) Se a for multiplicado por um número natural n, o valor b também fica multiplicado por n, ou seja, $f(n \cdot a) = n \cdot f(a) = n \cdot b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, o peso P de um fio de cobre homogêneo é diretamente proporcional ao seu comprimento C. De fato, o peso do fio é função crescente de seu comprimento, isto é, se tomarmos pedaços com comprimentos C_1 e C_2 com $C_1 < C_2$ tem-se $P_1 < P_{2;}$ além disso, se pudéssemos tomar n pedaços iguais do fio então o peso de todos os pedaços juntos seria o peso de um pedaço multiplicado por n.

Ainda segundo Lima (1987), tem-se o caso em que $a\ e\ b$ são grandezas *inversamente proporcionais*. Para isso, basta que sejam satisfeitas as seguintes condições: I) b é função decrescente de a, isto é, dados $a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) > f(a_2)$; e II) Se a for multiplicado por um número natural n, o valor b fica dividido por n, ou seja, $f(n \cdot a) = (1/n) \cdot f(a) = (1/n) \cdot b$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Um exemplo bastante simples de uma relação entre grandezas inversamente proporcionais refere-se ao tempo que um automóvel gasta para percorrer uma distância fixa, porém, com variação da velocidade deste automóvel. Suponhamos que um taxista queira fazer um trajeto em linha reta cujo comprimento mede M. Assim, se o taxista aumentar a velocidade então o tempo necessário para fazer o trajeto M diminui. Além disso, se a velocidade for dobrada, triplicada, etc. então o tempo reduz-se à metade, um terço, etc.

Diante do exposto, podemos agora definir uma proporcionalidade como uma função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$que obedece às seguintes propriedades:

1) f é uma função crescente, isto é $a < a' \Rightarrow f(a) < f(a')$ para quaisquer que seja $a, a' \in \mathbb{R}^+$;
2) Para todo $a \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f(na) = n \cdot f(a)$.

De um modo geral, a segunda propriedade estabelecida é válida também para o caso em que n é um número real positivo. A partir dela pode-se demonstrar o *Teorema Fundamental da Proporcionalidade* que diz: Se $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$é uma função crescente de tal forma que $f(na) = n \cdot f(a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $a \in \mathbb{R}^+$, então $f(la) = l \cdot f(a)$ quaisquer que seja $a, l \in \mathbb{R}^+$.

Dada uma proporcionalidade $b = f(a)$, o número k, correspondente ao valor de b quando $a = 1$, ou seja, $k = f(1)$, chama-se *fator de proporcionalidade*. Dessa forma, pela segunda condição da definição de proporcionalidade dizer que a grandeza b é proporcional a grandeza a é o mesmo que afirmar que existe um número k, chamado fator de proporcionalidade, tal que $b = f(a) = f(a \cdot 1) = a \cdot f(1) = a \cdot k$ para todo a. Quando a grandeza a for inversamente proporcional à grandeza b, tem-se $b = f(a) = f(a \cdot 1) = (1/a) \cdot f(1) = (1/a) \cdot k$ e, portanto, $b = (1/a) \cdot k$.

Um método de resolução de problemas envolvendo proporcionalidade bastante simples é a chamada *regra de três*. Suponhamos que se tenha uma proporcionalidade direta $b = f(a)$ e sejam conhecidos os valores $b_1 = f(a_1)$ e $b_2 = f(a_2)$, assim existe k tal que $b_1 = k \cdot a_1$ e $b_2 = k \cdot a_2$ o que resulta $b_1/b_2 = a_1/a_2$. Esta igualdade nos permite obter qualquer um dos valores a_1, a_2, b_1, b_2 quando se conhece os outros três valores, por isso a denominação "regra de três".

Mostremos um exemplo de um problema em que é importante descobrir o valor de k

para encontrar a solução desejada. Imaginemos que o empresário Jorge aplique 10 mil reais na caderneta de poupança de um banco, enquanto que seu amigo Paulo aplique 6 mil reais também na caderneta de poupança e no mesmo banco. Se Paulo possui no final de um mês um saldo de 6.070 reais, qual será o valor de Jorge?

Para descobrir o fator de proporcionalidade precisamos dividir o valor do saldo de Paulo, isto é, 6070 reais por 6.000, o que resulta em ≅1,011. Agora multiplicamos este fator obtido pelo valor aplicado por Jorge. Assim temos que o saldo de Jorge ao final do primeiro mês corresponde a $10000 \cdot 1{,}011 = 10110$, ou seja, 10110 reais.

Quando se tem a grandeza b inversamente proporcional à grandeza a, também é possível utilizar a *regra de três inversa* na resolução dos problemas envolvendo a necessidade da descoberta de um quarto valor. Suponhamos que são conhecidos os valores $b_1 = f(a_1)$ e $b_2 = f(a_2)$ da proporcionalidade inversa $b = f(a)$. Por definição, existe k tal que $b_1 = k \cdot (1/a_1)$ e $b_2 = k \cdot (1/a_2)$, o que implica que $b_1/b_2 = a_2/a_1$.

Vejamos um exemplo em que se aplica a regra de três inversa. Consideremos 5 torneiras que, mantendo uma vazão constante, conseguem encher um determinado tanque em 2 horas. Nestas condições, quanto tempo será necessário para que o mesmo tanque fique cheio se apenas três torneiras forem abertas?

Precisamos descobrir inicialmente o fator de proporcionalidade. Para isso, devemos dividir o número de horas que as cinco torneiras gastam para encher o tanque pelo número total de torneiras. Fazendo isso, encontraremos o fator igual a 0,4. Assim, multiplicando 0,4 por 3, que representa a quantidade de torneiras ligadas, obtemos um tempo de 1,2 horas necessárias para encher o tanque.

3.2 Caso em que uma grandeza é simultaneamente proporcional a outras

Suponhamos que uma grandeza que valha t depende das grandezas cujos valores valham x, y e z. Vamos escrever $t = f(x, y, z)$ para denotar essa dependência. Diz-se que t é diretamente proporcional a x, y e z quando mantidas dois desses valores fixos tem-se que t é proporcional ao outro restante, isto é, $n_1 t = f(n_1 x, y, z)$. Acontecendo isto, tem-se $t = f(x, y, z) = f(x \cdot 1, y, z) = x \cdot f(1, y, z) = x \cdot f(1, y \cdot 1, z) = xy \cdot f(1,1,z) = xy \cdot f(1,1, z \cdot 1) = xyz \cdot f(1,1,1)$, logo $t = xyz \cdot k$, onde neste caso o fator de proporcionalidade é k= $f(1,1,1)$.

No caso em que uma grandeza w é inversamente proporcional às grandezas x, y e z, tem-se $w = f(x, y, z) = f(x \cdot 1, y, z) = (1/x) \cdot f(1, y, z) = (1/x) \cdot f(1, y \cdot 1, z) = (1/xy) \cdot$

$f(1,1,z) = (1/xy) \cdot f(1,1,z \cdot 1) = (1/xyz) \cdot f(1,1,1)$, ou seja, $w = (1/xyz) \cdot f(1,1,1)$ onde $f(1,1,1)$ vale k.

Na seção seguinte sugerimos alguns problemas que permitem o aluno aplicar a noção de proporcionalidade em sua resolução.

3.3 Alguns problemas do cotidiano

1- Viajando de moto, a uma velocidade média de 60 km por hora, consigo ir da cidade A para a cidade B em 3 horas. Qual deve ser a minha nova velocidade média para que eu faça o mesmo percurso em 2 horas?

2- (LIMA et al., 2013) Um barco com 7 pessoas, à deriva no mar, tem suprimento de água suficiente para 28 dias. Após 3 dias, o barco recolhe 2 náufragos. Se o consumo diário de água por pessoa se mantiver, em quantos dias mais acabará a reserva?

3- (LIMA et al., 2013) Dois tanques, em forma de blocos retangulares, têm o mesmo volume. O primeiro tem 1,2m de profundidade e sua tampa mede 18 metros quadrados. O segundo tem 2 metros de profundidade. Qual deve ser a medida da tampa para cobri-lo?

4- (LIMA et al., 2013) Um objeto soltado do alto de um edifício leva 5 segundos para atingir o solo. Quanto tempo levaria esse objeto para cair de um prédio 3 vezes mais alto?

5- (LIMA et al., 2013) Um fazendeiro, na safra passada, usou 12 camponeses para cortar sua plantação de cana de 120 hectares. Trabalhando 6 horas por dia, os trabalhadores concluíram o serviço numa semana. Este ano, o fazendeiro plantou 180 hectares e dispõe de 14 cortadores de cana, dispostos a trabalhar 8 horas por dia, durante 5 dias. Quantos hectares de cana esses trabalhadores conseguirão cortar?

4 REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

LIMA, E. L. Grandezas proporcionais. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 1987, São Paulo. **Anais**... São Paulo: SBEM, 1987. p. 27-44. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/enemI.pdf>. Acesso em: 20 mai. 2017.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **Temas e problemas elementares**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SMOLE, K. S. **A resolução de problemas e o pensamento matemático**. [S.d]. Disponível em: <http://www.edicoessm.com.br/sm_resources_center/somos_mestres/formacao-reflexao/a-resolucao-de-problemas-pensamento-matematico.pdf>. Acesso em: 20 mai. 2017.