ANÁLISE DE ERROS EM PROBLEMAS DE GEOMETRIA ESPACIAL: uma investigação com estudantes do curso de graduação em Matemática Licenciatura da UFPE-CAA.

Pedro Henrique dos Santos[1]
José Geraldo de Lima Bezerra[2]
Dimas Camilo da Silva[3]
Débora Karyna dos Santos A. B. da Silva[4]

RESUMO

Este artigo é uma proposta de uma pesquisa produzida na disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática III do curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco - Centro Acadêmico do Agreste (UFPE-CAA) no semestre 2016.2, onde fomos instigados a propor e aplicar um questionário em uma turma da graduação. Buscamos objetivamente analisar os erros presentes em questões de Geometria Espacial respondidas pelos estudantes desse curso. A metodologia utilizada para coleta dos dados foi a aplicação de um questionário composto por seis problemas abertos envolvendo os mais diversos tópicos da Geometria Espacial. A análise dos dados apontou que os estudantes apresentam dificuldades na resolução de problemas que envolvem a Geometria Espacial, tendo em vista que os tópicos que compuseram as questões pertencem à matriz curricular do ensino médio e na graduação os sujeitos também já cursaram a disciplina que debate sobre os mesmos. Consideramos, sobretudo, a importância de uma ação interventora para poder esclarecer os erros e utilizá-los como ponto de partida para uma melhor aprendizagem da Geometria Espacial.

Palavras-chave: Análise de Erros. Licenciatura em Matemática. Geometria Espacial.

1 INTRODUÇÃO

O referido artigo é parte integrante da avaliação do componente curricular "Metodologia do Ensino de Matemática III" do curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco – Centro Acadêmico do Agreste do semestre

[1] Universidade Federal de Pernambuco, pedro.santos7688@gmail.com.
[2] Universidade Federal de Pernambuco, geraldo_lima123@hotmail.com.
[3] Universidade Federal de Pernambuco, dimas_13camilo@hotmail.com.
[4] Universidade Federal de Pernambuco, debora.kj@hotmail.com.

2016.2. A proposta desta disciplina é estudar os conteúdos de Geometria e Grandezas e Medidas nos ensinos fundamental e médio nas perspectivas epistemológica, didática e cognitiva.

Historicamente, a Matemática sempre foi considerada como a “ciência exata” na qual o mínimo erro anula toda a resposta de uma questão e, infelizmente, para tantos professores era apenas mais um erro. No entanto, diversos estudos têm mostrado que o erro é parte integrante do processo de ensino-aprendizagem, são os saberes que o aluno construiu de alguma forma e que necessitam serem investigados para que soluções sejam propostas para sua superação.

Ao longo da disciplina pudemos estudar sobre o que era proposto pelos documentos curriculares nacionais e estaduais sobre os eixos em que a Matemática é subdividida. Além disso, eram trazidas discussões sobre o que era proposto em tais documentos e o que se observava efetivamente em sala de aula. Tais discussões se deram com base em pesquisas com professores da educação básica, análises de livros didáticos, pesquisas com alunos da escola básica, etc.

Considerando o erro como objeto passível de investigação e partindo do pressuposto de que “O erro pode ainda ser considerado *procedimento construtivo* como método de descoberta científica e transmissão didática” (TORRE, 2007, p. 15) o objetivo deste artigo é analisar os erros presentes em questões de Geometria Espacial respondidas por estudantes graduandos.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 O erro e suas atribuições: um pouco sobre Geometria.

Etimologicamente a palavra erro significa: “desacerto, incorreção, engano” (BUENO, 2007). Geralmente o erro é considerado como elemento do fracasso, decorrente da falta de atenção, no entanto diversos estudiosos não veem o erro nessa perspectiva, mas sim como uma falha no êxito e que precisa ser investigado.

Dentre esses estudiosos destacamos Cury (2007, p. 13) a qual considera que os acertos não garantem que os alunos sabem, tampouco os erros evidenciam somente o que eles não sabem. Nesse sentido, a análise do erro supera esse viés da falha e do fracasso, e busca “[...] detectar as maneiras como o aluno pensa e, mesmo, que influências ele traz de sua aprendizagem anterior, formal ou informal.”

A autora destaca ainda que a análise das atividades dos alunos proporciona também o conhecimento de como se dá a apropriação do saber por parte deles, por isso além de ser uma metodologia de pesquisa, pode ser, também, utilizada como metodologia de ensino em sala de aula, ou seja, os alunos analisariam suas atividades e as dos colegas a fim de questionar as respostas, ao mesmo tempo em que estariam construindo novos conhecimentos.

Anteriormente a Cury (2008), autoras como More, David e Machado (1992) já destacavam a importância de discutir o erro como elemento integrador do processo de ensino e aprendizagem, encarando-o como algo positivo.

> Numa avaliação tradicional, que o professor verifica tão-somente se o aluno domina o conteúdo, não há um questionamento mais profundo sobre a origem do erro cometido pelo aluno. Por exemplo, não são levantadas questões do tipo: o aluno comete sistematicamente o mesmo erro [...]? Existe alguma lógica por trás dele? [...] O processo de ensino poderia está induzindo o aluno a determinado erro? (MOREN, DAVID e MACHADO, 1992, p.51).

Podemos pensar, ainda, sobre as atitudes dos professores diante do erro. Nesse sentido, TORRE (2007, p. 109) argumenta “Como o professor atua diante dos erros? Na maior parte dos casos, corrige-os indicando a solução correta. Mas ele se pergunta por que os alunos cometeram determinado erro? Pensa no tipo de erro que se trata? Fazer-se tais perguntas e tentar responde-las lhe proporcionará muito mais informação que a simples correção.”

O erro deve, sobretudo, ser evidenciado pelo professor em contato com o aluno visto que:

> O aluno pode saber que se equivocou e onde se equivocou, mas desconhecer em que está o erro, qual regra, norma ou convencionalismo transgrediu, por que um determinado conceito está mal. Entrar nas causas do erro significa entrar na psicologia de quem aprende, já que todo erro comporta um aspecto relacional; (TORRE, 2007, p. 135)

Entre os mais diversos conteúdos da Matemática enquanto disciplina da escola básica é fato que a geometria se destaca no campo das aplicações às situações do dia a dia. Saber calcular, por exemplo, o volume de um paralelepípedo pode facilitar o cálculo de volume de uma piscina que será construída em casa, por exemplo.

Perguntas como: “Professor, como surgiu a geometria?”, “Onde surgiu a Geometria?”, “De onde veio essa fórmula” são perguntas que podem surgir em aula quando o professor começa a ensinar Geometria a seus alunos. Segundo Boyer (1974, p. 4)

> Afirmações sobre as origens da Matemática, seja da Matemática seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos sei milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de pôr seus registros e pensamentos em forma escrita. Para informações sobre a pré-história dependemos de interpretações baseadas nos poucos artefatos que restaram, de evidência fornecida pela moderna antropologia, e de extrapolação retroativa, conjetural, a partir dos documentos que sobreviveram.

Ressaltamos, ainda, as orientações fornecidas pelos documentos curriculares nacionais e estaduais. Orientações essas, que muitas vezes são evidenciadas em trabalhos científicos e que se mostram, na maioria das vezes, como sendo úteis no processo de ensino-aprendizagem. Seja a utilização de jogos, tecnologia, a tão falada resolução de problemas, a história da Matemática, a modelagem, a etnomatemática, etc. Cabe ao professor decidir qual(is) delas pode(m) ser mais úteis para o ensino de determinado conteúdo.

2.2 Percurso Metodológico

O questionário foi elaborado com orientação da professora da disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática III de forma que envolvesse os mais diversos tópicos da Geometria Espacial ressaltando, sobretudo, pontos que muitas vezes são deixados de lado pelos professores e, como consequência, pelos alunos.

O questionário é composto por seis problemas abertos que envolvem assuntos como: Volume (de diferentes sólidos), Planificação, Nomenclatura de Sólidos, Propriedades dos sólidos, Área da superfície de sólidos e Variações de uma grandeza em função de outra. O objetivo de tal questionário era investigar como anda o conhecimento de Geometria Espacial dos alunos que serão, daqui a algum tempo, professores. Por isso a necessidade de se explorar diversos tópicos dentro da Geometria Espacial e não apenas um específico, como por exemplo: Volume.

Após a elaboração, o questionário foi aplicado a um grupo de 21 estudantes do curso de Matemática Licenciatura sob a supervisão da professora da disciplina. Os estudantes dispuseram de 40 minutos para resolver o questionário. Todavia, selecionamos apenas 12 estudantes para análise, visto que os outros 9 não apresentaram respostas ao questionário.

A fim de quantificarmos os erros encontrados nas respostas do questionário utilizaremos a classificação de respostas proposta por (PESSOA, 2009). Tal classificação pode ser encontrada na tabela abaixo.

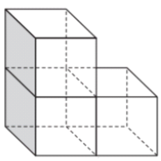
Classificação dos erros segundo Pessoa (2009, p. 131-132)

i. **Em branco**	Não se pode, nestes casos, saber se o aluno não respondeu porque não sabia, porque não se interessou, porque não quis fazer ou se considerou o problema de difícil resolução.
ii. **Apenas resposta incorreta**	O aluno dá apenas a resposta errada para o problema proposto, embora seja possível, muitas vezes, inferir qual a operação por ele realizada.
iii. **Apenas resposta correta, sem explicação da estratégia.**	O aluno dá apenas a resposta certa para o problema proposto, embora seja possível, muitas vezes, inferir qual a operação por ele realizada.
iv. **Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação.**	O aluno apresenta uma resposta incorreta e na sua resolução não há indícios de relação com a questão proposta.
v. **Resposta incorreta, com o estabelecimento de relação. (Apresenta certa compreensão do problema)**	O aluno erra a resposta; entretanto, sua estratégia de resolução é válida para o que é solicitado, mantém uma relação lógica com o problema. Na maioria das vezes, porém, neste caso, o aluno não consegue esgotar todas as possibilidades para o tipo de problema proposto.
vi. **Resposta correta com explicitação de estratégia**	O aluno consegue compreender a lógica do problema e chegar à resposta correta, encontrando formas de esgotar todas as possibilidades.

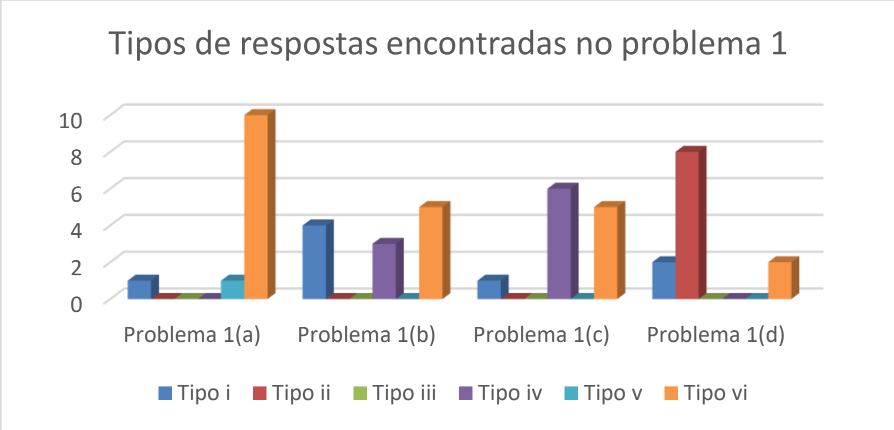
3 Resultados e Discussões

Apresentamos o problema 1:

Considere o sólido abaixo como sendo a união de 3 hexaedros regulares de mesma aresta.



a) Quanto vale o volume do sólido se a medida da aresta é $5\ cm$?
b) Este sólido é convexo? Justifique.
c) Quanto mede a área da superfície desse sólido se a medida da aresta for $8\ cm$?
d) Exiba uma planificação para este sólido.



A primeira questão tinha como objetivos:

- Verificar se o aluno compreende o volume de um sólido composto pela união de outros que não têm pontos internos em comum como sendo a soma dos respectivos volumes dos sólidos que o compõem;
- Verificar se o aluno consegue definir se um poliedro é convexo ou não sem a utilização da relação de Euler;
- Verificar se o aluno compreende que a área de superfície de um sólido composto pela união de outros depende da configuração estabelecida.
- Verificar se o aluno consegue estabelecer a planificação de um sólido composto pela união de outros.

Como pode ser visto no gráfico acima, 83,33% dos alunos conseguiram responder corretamente ao item (a) estabelecendo que se a aresta do hexaedro regular mede 5cm, então o volume de um hexaedro regular mede $5^3 cm^3$ e, como consequência, o volume do sólido apresentado na figura mede 3 vezes $5^3 cm^3$. O único erro encontrado na questão se deu ao fato de que o estudante calculou o volume de apenas um dos hexaedros regulares.

No item (b) obtivemos uma taxa de 41,66% de acertos. Um fato interessante foi que nenhum dos estudantes utilizou a relação de Euler como “critério de convexidade”.

No item (c) obtivemos 50% de erros e todos eles se deram, em sua maioria, porque os estudantes utilizaram o mesmo critério para o volume, em outras palavras: os estudantes consideraram que se um hexaedro regular tem 8 cm então a área da sua superfície é $6 \cdot 8^2$, o que está correto. A partir daí, consideraram que se um sólido é composto pela união de 3 hexaedros regulares então a área desse sólido é 3 vezes a área de cada hexaedro regular, ou seja, $3 \cdot 6 \cdot 8^2$. O que não é, necessariamente, verdade.

Um outro erro que pôde ser notado foi que o estudante compreendeu como calcular a área da superfície do sólido como sendo a soma das áreas dos quadrados das faces que o compõem, mas errou ao estabelecer a quantidade desses quadrados. (d) obtivemos 66,66% de erros nas planificações descritas. Algumas delas podem ser vistas nos exemplos abaixo. Exemplos:

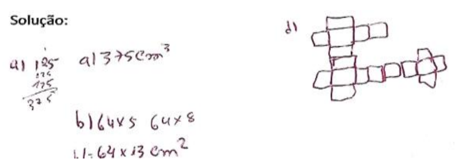


Figura 2: Respostas do estudante 4.

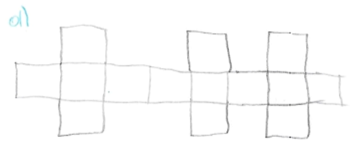


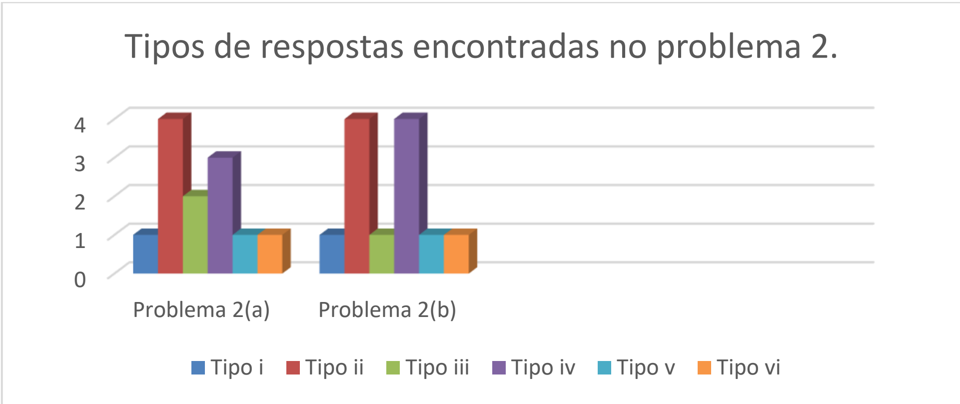
Figura 4: Planificação feita pelo estudante 6.

No problema 2 tínhamos:

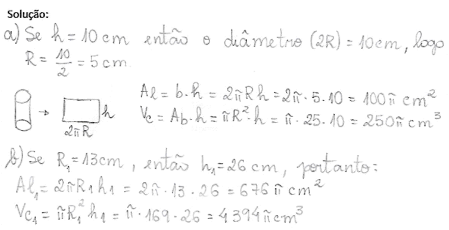
Considere um cilindro circular equilátero.

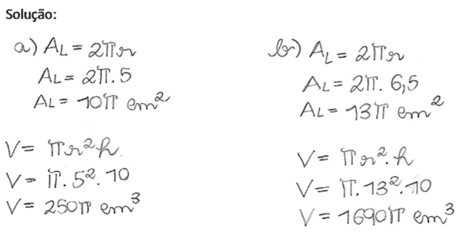
a) Calcule a área lateral e o volume desse cilindro quando a altura mede $10\ cm$.

b) Calcule a área total e o volume desse cilindro quando o raio da base mede $13\ cm$.

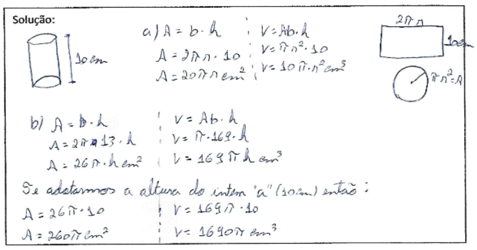


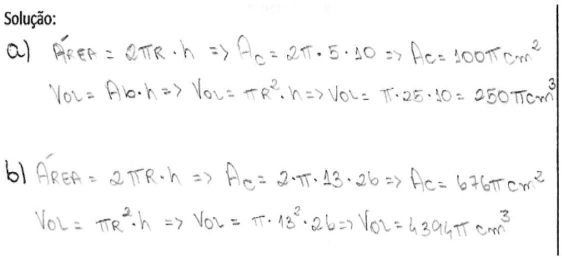
O objetivo desse problema era explorar a propriedade que caracteriza um cilindro circular equilátero. O que pudemos notar é que essa propriedade, muitas vezes esquecida, fez desse problema o que obteve mais erros/respostas incompletas. Apenas uma estudante apresentou a resposta correta com justificativa e outro apresentou a resposta correta, mas não justificou a propriedade. Os erros se deram, sobretudo, pelo fato dos estudantes não lembrarem do fato de que se um cilindro é equilátero então a medida de sua altura é igual medida do diâmetro de sua base. Outros erros encontrados se deram ao fato de os estudantes não lembrarem a equação utilizada para o cálculo de área lateral de cilindros. Além desses, houveram respostas em que os estudantes utilizaram os dados de um item no outro. Como podemos ver abaixo:


Solução:
a) Se $h = 10\,cm$ então o diâmetro $(2R) = 10\,cm$, logo $R = \frac{10}{2} = 5\,cm$
$A_l = b \cdot h = 2\pi R h = 2\pi \cdot 5 \cdot 10 = 100\pi\,cm^2$
$V_c = A_b \cdot h = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 25 \cdot 10 = 250\pi\,cm^3$
b) Se $R_1 = 13\,cm$, então $h_1 = 26\,cm$, portanto:
$Al_1 = 2\pi R_1 h_1 = 2\pi \cdot 13 \cdot 26 = 676\pi\,cm^2$
$V_{c_1} = \pi R_1^2 h_1 = \pi \cdot 169 \cdot 26 = 4394\pi\,cm^3$


Solução:
a) $A_L = 2\pi r$
$A_L = 2\pi . 5$
$A_L = 10\pi\ cm^2$
$V = \pi r^2 h$
$V = \pi . 5^2 . 10$
$V = 250\pi\ cm^3$
b) $A_L = 2\pi r$
$A_L = 2\pi . 6,5$
$A_L = 13\pi\ cm^2$
$V = \pi r^2 . h$
$V = \pi . 13^2 . 10$
$V = 1690\pi\ cm^3$

Respostas apresentadas pelos estudantes 12 e 11, respectivamente.

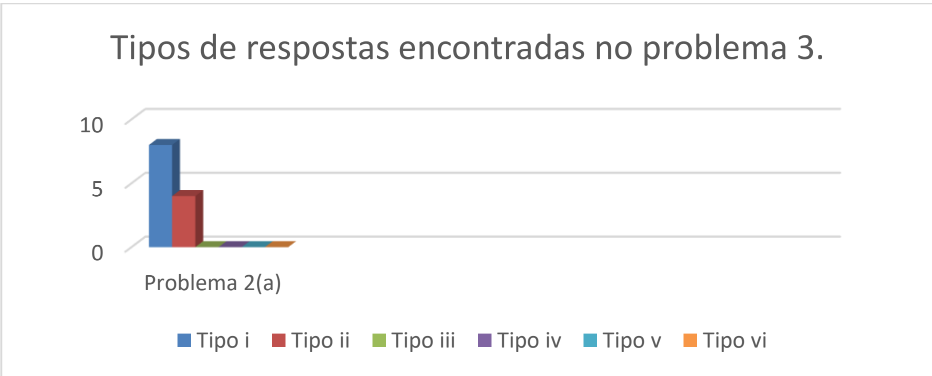

Solução:
a) $A = b \cdot h$; $V = A_b \cdot h$
$A = 2\pi r \cdot 10$; $V = \pi r^2 \cdot 10$
$A = 20\pi r\ cm^2$; $V = 10\pi r^2\ cm^3$
b) $A = b \cdot h$; $V = A_b \cdot h$
$A = 2\pi \cdot 13 \cdot h$; $V = \pi \cdot 169 \cdot h$
$A = 26\pi \cdot h\ cm^2$; $V = 169\pi h\ cm^3$
Se adotarmos a altura do item "a" (10 cm) então:
$A = 26\pi \cdot 10$; $V = 169\pi \cdot 10$
$A = 260\pi\ cm^2$; $V = 1690\pi\ cm^3$


Solução:
a) Área $= 2\pi R \cdot h \Rightarrow A_c = 2\pi \cdot 5 \cdot 10 \Rightarrow A_c = 100\pi\ cm^2$
$Vol = A_b \cdot h \Rightarrow Vol = \pi R^2 \cdot h \Rightarrow Vol = \pi \cdot 25 \cdot 10 = 250\pi\ cm^3$
b) Área $= 2\pi R \cdot h \Rightarrow A_c = 2 \cdot \pi \cdot 13 \cdot 26 \Rightarrow A_c = 676\pi\ cm^2$
$Vol = \pi R^2 \cdot h \Rightarrow Vol = \pi \cdot 13^2 \cdot 26 \Rightarrow Vol = 4394\pi\ cm^3$

Respostas apresentadas pelos estudantes 9 e 10, respectivamente.

O problema 3 consiste em:

Calcule o volume de um hexaedro regular cuja diagonal mede 6 cm.



O objetivo desse problema era investigar se os alunos conseguiam exprimir o volume de um cubo (hexaedro regular) em função da medida de sua diagonal ou se conseguiam descobrir a medida da aresta do cubo a partir da medida da diagonal. Utilizamos o nome "hexaedro regular" em vez de cubo para investigarmos se os estudantes estavam familiarizados com outras nomenclaturas além da "usual" (cubo).

Esse problema foi o único da pesquisa que nenhum estudante respondeu corretamente. 66,66% dos estudantes deixaram o problema em branco e o restante respondeu incorretamente. Os erros se deram ao fato de os estudantes aplicarem, de modo errôneo, o Teorema de Pitágoras para calcular a medida da aresta do hexaedro regular ou pelo fato de considerarem a medida da diagonal como se fosse a medida da aresta e calcularem o volume de um hexaedro regular de aresta medindo 6cm. Houve um erro partindo desse último citado que envolvia a operação de potenciação. Vejamos os erros encontrados:

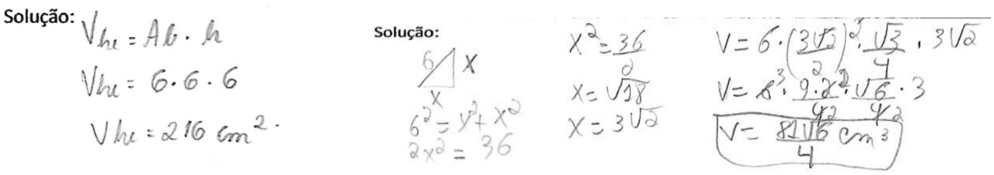


Figura 7: Respostas apresentadas pelos estudantes 8 e 7, respectivamente.

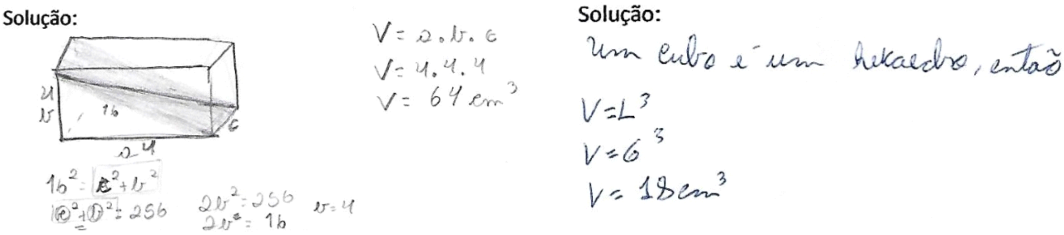
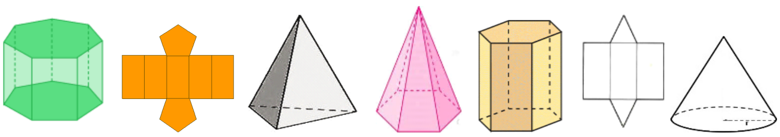
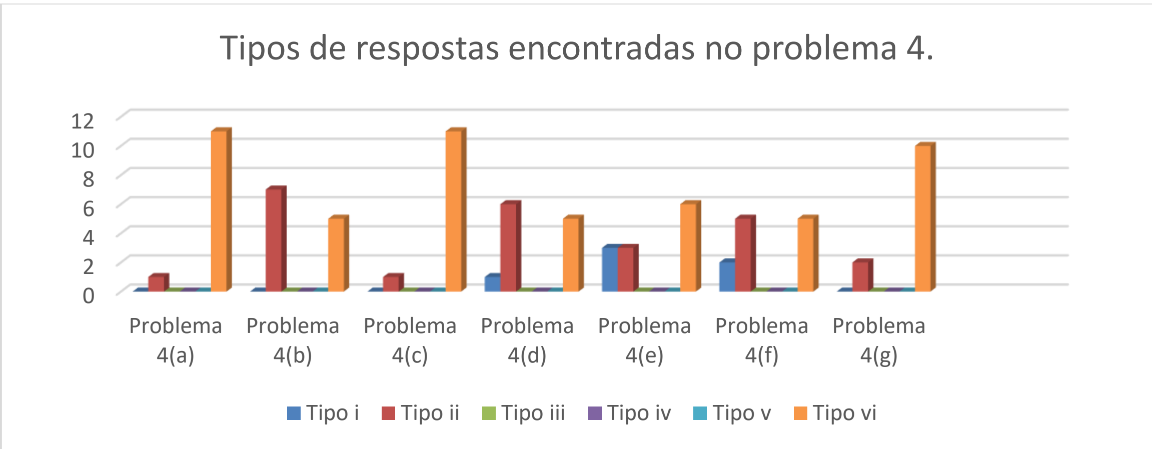


Figura 8: Respostas apresentadas pelos estudantes 1 e 9, respectivamente.

No problema 4 foi solicitado aos estudantes que nomeassem os sólidos abaixo de acordo com o tipo e o polígono de sua base.





O propósito desse problema era averiguar a capacidade dos estudantes em nomear os sólidos geométricos com base no seu tipo e polígono da base envolvendo não apenas figuras, mas também planificações. Os erros encontrados baseavam-se, sobretudo, em não lembrar os tipos dos sólidos (prismas, pirâmides, etc) ou ainda estar familiarizados com questões de geometria plana havendo resquícios da transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial. Alguns exemplos de erros encontrados:

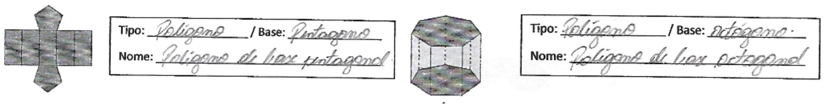


Figura 9: Respostas do estudante 8

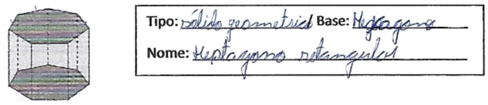


Figura: 10 Resposta do estudante 9

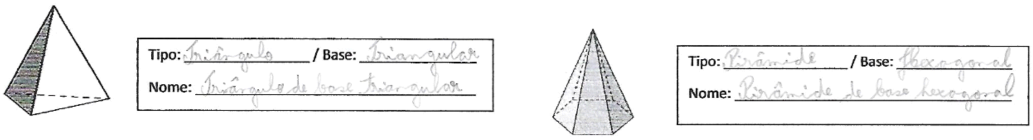
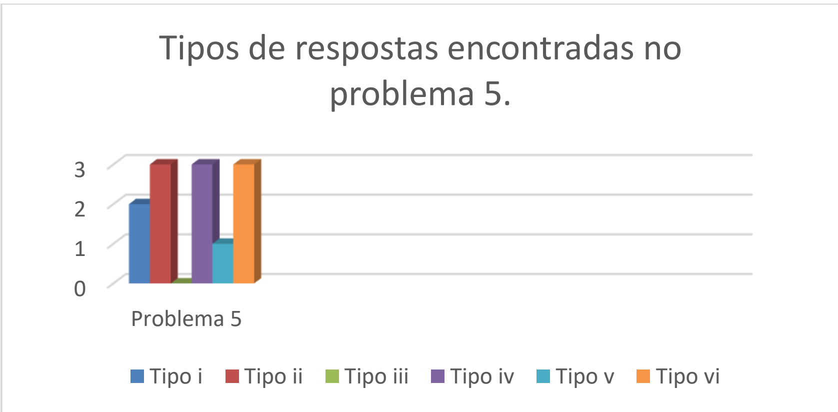


Figura 11: Respostas do estudante 2

Problema 5:

Se reduzirmos a medida do diâmetro de uma esfera em **30%** , quanto será reduzido do volume dessa esfera?



O objetivo desse problema era verificar se os estudantes sabiam interpretar a variação de uma grandeza em função de outra. Mais precisamente, a interpretação da variação do volume de uma esfera em função da medida do seu raio. Para isso, eles teriam que entender que uma variação de 30% na medida do diâmetro da esfera implica numa variação de 30% no valor do raio e, a partir daí, estabelecer a variação no volume da esfera. O problema teve 16,66% de respostas em branco, 25% de erros onde era possível estabelecer a operação realizada e 25% de erros que não tinham relação com o problema. Dos 3 estudantes (25%) que acertaram, apenas um estabeleceu a variação para um diâmetro\raio qualquer. Os outros dois fizeram para um dado valor. Vejamos algumas respostas encontradas:

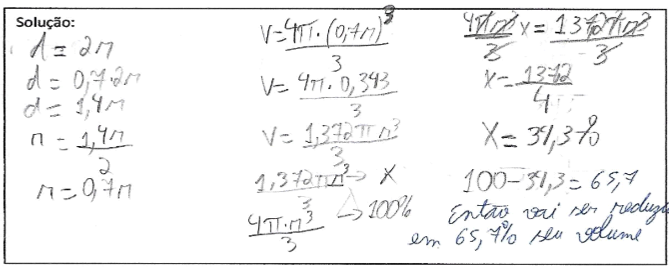


Figura 12: Resposta do estudante 7.

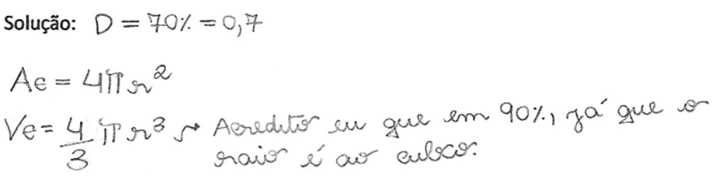
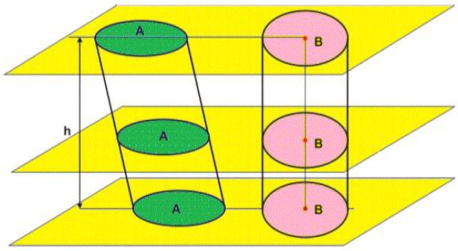
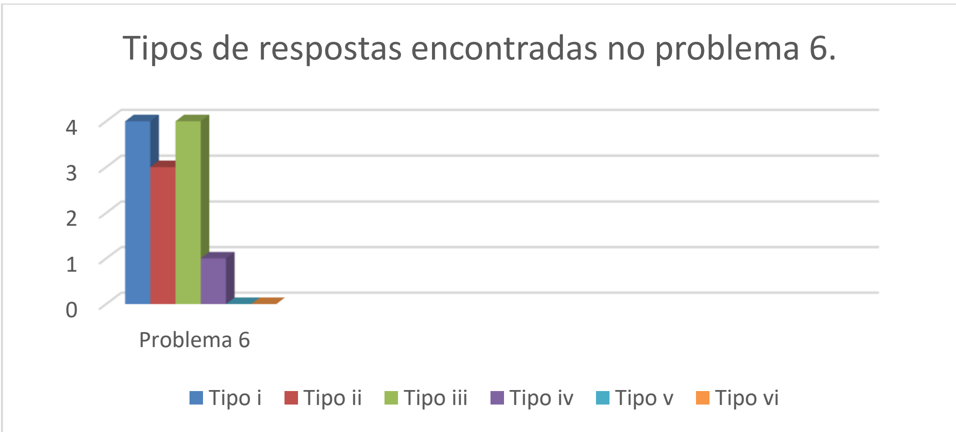


Figura 13: Resposta do estudante 11

O problema 6:

O cilindro circular destacado em rosa na figura abaixo tem raio da base, r, igual a $7cm$ e altura $h = 12\ cm$. Se todos os planos, paralelos ao plano das bases dos sólidos, que seccionam os dois sólidos presentes na figura formam figuras de mesma área, quanto mede o volume do sólido destacado com a cor verde? Justifique.





O propósito dessa questão não era, como os estudantes pensaram, o cálculo do volume. O objetivo era que os estudantes percebessem o Princípio de *Cavalieri* embutido no enunciado e, a partir disso, justificasse com base nesse princípio que os volumes seriam iguais. Para nós, nesse caso, pouco nos importava se eles sabiam calcular o volume de um cilindro.

Queríamos, sobretudo, que os estudantes argumentassem a igualdade dos volumes com base no princípio de *Cavalieri.* O que nos deixou um pouco “aflitos” foi o fato de nenhum estudante falar sobre tal princípio. Alguns até responderam que os volumes seriam iguais, mas não explicaram o motivo. Outros apenas calcularam o volume do cilindro destacado em rosa. O estudante 4 deu a resposta que pode ser vista abaixo, mas não justificou o porquê da veracidade da resposta. Obtivemos, ainda, 33,33% de respostas em branco.

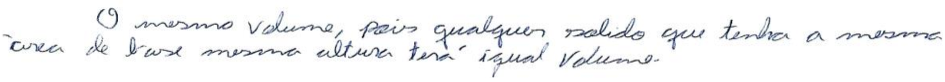


Figura 16: Resposta do estudante 9

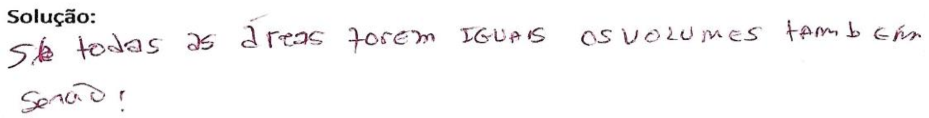


Figura 17: Resposta do estudante 4.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Realizado com o propósito de analisar os erros cometidos por alunos do curso de Licenciatura em Matemática na resolução de questões de Geometria Espacial, após a análise dos dados consideramos que os alunos ainda não possuem total domínio das propriedades necessárias para a resolução de problemas que envolvem essa geometria.

Dos objetivos que tínhamos com as questões, praticamente nenhum objetivo foi atingido totalmente. Levando em consideração que todas as questões foram baseadas em assuntos do ensino médio, sendo as mesmas aplicadas em uma turma de nível superior, ficamos preocupados pois esperávamos mais êxito nas questões. Principalmente pelo fato de que os alunos já tiveram mais um contato com a Geometria Espacial no ensino superior na disciplina de “Matemática III”.

Com base nas respostas dadas pelos nossos sujeitos apontamos um déficit no processo de ensino-aprendizagem de Geometria Espacial. Acreditamos que uma das causas disto se deve ao fato dos conteúdos de Geometria visto no ensino médio serem comtemplados na última unidade dos livros didáticos, outros conteúdos são priorizados. No entanto, no curso de Licenciatura em Matemática, no semestre em que se encontravam nossos sujeitos quando aplicamos o questionário, estes já haviam cursado a disciplina que aborda e discute as temáticas que compuseram nosso instrumento de coleta de dados.

Vale ressaltar que não estamos afirmando que não houve aprendizagem por parte dos alunos, uma vez que consideramos o erro como um processo construtivo, no entanto foi uma aprendizagem limitada considerando, sobretudo, o semestre em que se encontram na graduação. Tendo em vista que esses sujeitos serão os professores de Matemática daqui a algum tempo, os erros cometidos por estes, nos fazem inferir ser necessário um maior aprofundamento nesse conteúdo.

Nesse sentido, a análise do erro é uma oportunidade de o professor repensar sua metodologia de ensino, tendo em vista que esta análise proporciona o conhecimento da forma que o aluno pensa. Consideramos, sobretudo, a importância de uma ação interventora para poder esclarecer os erros e utilizá-los como ponto de partida para uma melhor aprendizagem da Geometria Espacial afinal, o erro visto como integrante do processo possibilita a reconstrução do conhecimento.

5 REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução por GOMIDE, E. F. São Paulo, Edgar Blücher, 1974.
BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** (PCNEM). Brasília: MEC, SEMTEC, 2000.
BUENO, Silveira. **Mini dicionário da Língua Portuguesa.** São Paulo: FTD, 2007.
CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.** Belo Horizonte: Autêntica, 2008.
___________ **Análise de erros.** X ENEM - ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. SALVADOR-BA, 7 a 9 de Julho de 2010.
D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19.
EVES, H. **Introdução à história da Matemática.** Campinas, Editora Atual, 1992.
TORRE, S. de la. **Aprender com os erros: O erro como estratégia de mudança.** Porto Alegre: ARTMED, 2007.
LOBO, H. H. A. **Análise de erros em geometria.** Brasília: UCB, 2008
MOREN, E. B. S. DAVID, M. M. M. MACHADO, M. P. L. **Diagnóstico e análise de erros em matemática: subsídios para o processo ensino-aprendizagem in Cad. Pesq.,** São Paulo, n.83, p. 43-51, nov. 1992.
PESSOA, C. BORBA, R. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do Raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série.** ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v. 17, n. 31 – jan/jun – 2009.
PIROLA, N. A. **Solução de problemas geométricos: dificuldades e perspectivas.** 2000. 245p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas – SP.