RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INTERESSANTES ENVOLVENDO EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Marcos Luiz Henrique[1]

Jean Martins de Arruda Santos[2]

Resumo: Neste minicurso pretendemos abordar o conceito de Equação do Segundo Grau, assim como a sua importância na compreensão e resolução de problemas envolvendo tal tema. O minicurso foi estruturado em dois momentos. No primeiro, buscamos o desenvolvimento do raciocínio concernente à ideia de equação do segundo grau através da apresentação da teoria Matemática. Já no segundo momento, serão utilizados problemas motivadores visando a aplicação da teoria previamente apresentada. Assim, no presente minicurso, procuramos abordar alguns resultados relacionados à teoria e, em seguida, fazer aplicações através da resolução de problemas. Para tanto, os problemas serão utilizados na exploração do conceito de forma sistemática. Neste sentido, pretendemos mobilizar os participantes no que diz respeito à formação do pensamento sobre tal tema por um viés dinâmico e, ao mesmo tempo, que possibilite a compreensão e formação do conceito.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Resolução de problemas. Equação do segundo grau.

1 INTRODUÇÃO

Uma das tendências atuais no ensino de Matemática é a metodologia da resolução de problemas. Esta, por sua vez, possibilita ao aluno sair da condição de espectador do professor em sala de aula e tornando-o autor da construção de seu próprio conhecimento. A resolução de problemas se configura como uma importante metodologia de ensino de Matemática que propicia a aprendizagem através da mobilização de saberes, enquanto se busca a solução dos problemas. Nesse processo, o estudante passa a raciocinar de forma lógica, pensar estratégias e, assim, amadurecer gradativamente suas estruturas cognitivas.

Brousseau (1997, apud ALMOULOUD, 2007) discute que o aluno aprende através do processo de adaptação ao meio que possui dificuldades. Neste sentido, a construção do conhecimento se concretiza pela capacidade do aluno de resolver os problemas ao qual pode se deparar na sala de aula ou no seu cotidiano. Diante disso, é de grande relevância que no processo de ensino e aprendizagem o professor organize um meio que possibilite o

[1]Professor Adjunto do Núcleo de Formação Docente do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco (NFD-CAA-UFPE). E-mail: profmclh@hotmail.com
[2]Licenciando em Matemática pelo Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco (CAA-UFPE). E-mail: martinsarruda57@gmail.com

desenvolvimento de situações que provoquem a curiosidade e a busca gradativa da aprendizagem pelos estudantes.

Nessa perspectiva, desenvolvemos este minicurso onde abordamos o tema equação do segundo grau e utilizamos a resolução de problemas como ferramenta para potencializar a aprendizagem do conceito. Decidimos tratar de problemas envolvendo equação do segundo grau, uma vez que se trata de um tema bastante presente no cotidiano dos estudantes e pouco explorado no Ensino Básico. Além disso, este tema possui uma inestimável utilidade, com diversas aplicações não só em Matemática mais também em diversas áreas do conhecimento.

2 MÉTODOS E RECURSOS DIDÁTICOS

O presente minicurso terá duração de 4 horas e um público de até 20 pessoas. Além disso, ocorrerá em dois momentos: um de fundamentação teórica, em que será exposto o tema equação do segundo grau; e outro prático, assim determinados:

1) Momento teórico: será apresentado o tema equação do segundo grau de forma expositiva visando o desenvolvimento do raciocínio matemático dentro de um contexto motivador;
2) Momento prático: proporemos aos participantes uma seção de resolução de problemas sobre o tema em questão, onde poderão resolvê-los em grupo ou até mesmo individualmente.

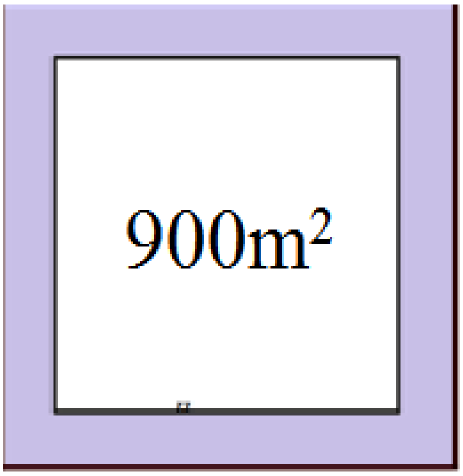
No momento da prática pretendemos conduzir os participantes a se envolverem no desenvolvimento de estratégias de resolução e aplicação do conceito abordado. Dessa forma, esperamos que os participantes raciocinem sistematicamente em busca das resoluções e, consequentemente, obtenham uma maior aprendizagem.

Utilizaremos como recursos didáticos data show, quadro brando e folhas de papel A4.

3 EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Suponhamos que uma praça pública, conforme é representado na figura abaixo, foi reduzida para dar lugar a uma calçada de 5m de largura. Sabendo que a área da praça passou a medir $900m^2$, qual é a medida do lado da praça original?

Figura 1 – Modelo da praça



Fonte: Os autores.

Chamemos de x a medida do lado da praça original, no caso, do quadrado maior. Observemos que após a redução da praça, o seu lado passou a medir $x - 10$. Assim, a sua nova área mede $(x-10)^2 = 900$, o que nos permite concluir que $x - 10 = \pm\sqrt{900} = \pm 30$, onde segue que $x = 10 \pm 30$. Logo, os valores de x que satisfazem a condição $(x-10)^2 = 900$ são $x' = 10 + 30 = 40$ e $x'' = 10 - 30 = -20$, chamados raízes da equação. Daí, temos que a medida da praça original é 40, já que (-20) não corresponde à medida do lado de nenhum quadrado.

A equação descrita acima, isto é, $(x-10)^2 = 900$, a partir da qual foram encontrados os valores 40 e (-20) para a incógnita x, representa um tipo de *equação do segundo grau*. Ao desenvolvê-la, obteremos $x^2 - 20x + 100 = 900$, ou ainda, $x^2 - 20x - 800 = 0$. Neste momento, cabe fazermos a seguinte pergunta: uma vez que estejamos diante de uma equação do segundo grau, a exemplo a discutida anteriormente, como resolvê-la? Como encontrar os possíveis valores de x? Esta pergunta além de importante é fundamental para compreendermos os procedimentos necessários à resolução de equações do segundo grau.

Utilizando fatoração podemos reescrever a equação discutida, donde obtemos $x^2 - 20x - 800 = (x-40)(x+20)$. Logo, a equação apresentada equivale a $(x-40)(x+20) = 0$. Mas o produto de dois fatores se anula quando ao menos um dos fatores é zero. Dessa forma, $x^2 - 20x - 800 = 0 \Rightarrow (x-40) = 0$ ou $(x+20) = 0$, sem descartar a possibilidade dos dois fatores serem iguais a zero.

Segundo Lima et al (2013) basicamente existem dois tipos de equação do segundo grau, a saber: I) Equações do tipo $(Ax+B)^2 = C$; e II) Equações do tipo $(Ax+B)(A_1x+B_1) = 0$.

Um exemplo de equação para o primeiro caso é $(x+3)^2 = 25$, o que resulta em $x + 3 = \pm\sqrt{25}$, logo $x = \pm 5 - 3$ e, portanto, $x' = 2$ e $x'' = -8$ são as raízes da equação.

Quando tivermos uma equação do tipo $(Ax + B)^2 = C$ com $C < 0$, esta não possui solução no conjunto dos números reais, haja vista que nenhum quadrado resulta em um número negativo. Por outro lado, quando $C = 0$, tem-se $(Ax + B)^2 = C \Rightarrow Ax + B = 0 \Rightarrow x = -B/A$, ou seja, a equação possui uma única raiz real $x' = x'' = -B/A$.

A equação $(x + 1)(x - 2) = 0$ é um exemplo de equação do tipo II. Nesta, temos $(x + 1) = 0$ ou $(x - 2) = 0$, donde segue que $x = -1$ ou $x = 2$, ou seja, $x' = -1$ e $x'' = 2$.

Na próxima seção apresentaremos um método que permite encontrar a solução de uma equação do segundo grau que não é do tipo I nem do tipo II.

3.1 Fatoração do trinômio do segundo grau

No geral, quando se tem uma equação do segundo grau que não possui a forma I ou II, pode-se substitui-la por outra equivalente, isto é, que possui a mesma solução.

Consideremos o trinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Assim, a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser substituída por $x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$. Chamemos de p a fração b/a e de q a fração c/a, assim, temos $x^2 + px + q = 0$.

É possível escrever a equação $x^2 + px + q = 0$ na forma $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$. Para tanto, basta fatorar o trinômio $x^2 + px + q$. Por conseguinte, como $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$, então devemos encontrar os números reais α, β que satisfaçam $\alpha + \beta = -p$ e $\alpha \cdot \beta = q$. Segundo Lima et al (2013, p. 42) “o problema de encontrar dois números conhecendo sua soma e produto é muito antigo. De fato, ele foi resolvido pelos babilônios há cerca de quatro mil anos”.

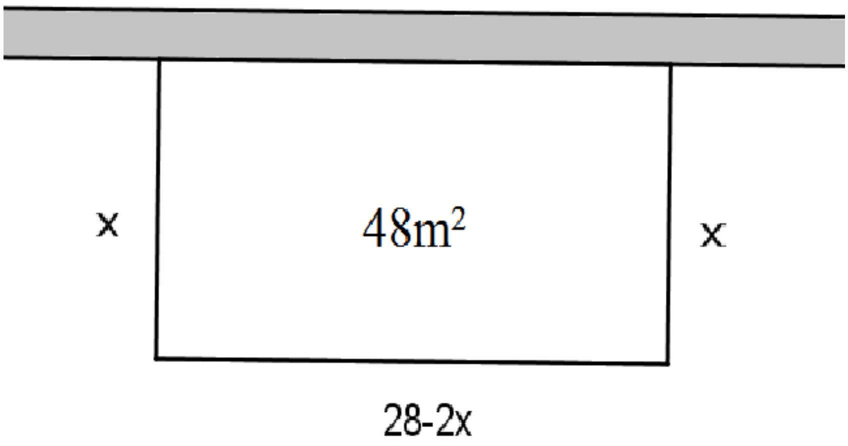
Façamos uma mudança de notação denotando $s = \alpha + \beta$ e $p = \alpha \cdot \beta$, onde indicam a soma e o produto, respectivamente, dos números α e β. De fato, não conhecemos os números α e β, mas sabemos que sua média aritmética vale $(\alpha + \beta)/2 = s/2$. Por conseguinte, $(\beta - \alpha)/2 = s/2 - \alpha = \beta - s/2$. Chamando de d a diferença $(\beta - \alpha)/2$, passamos a ter como único problema encontrar o número d, onde outrora eram α e β. Daí segue que $\alpha = (s/2) - d$ e $\beta = (s/2) + d$. Logo $p = \alpha \cdot \beta = (s/2 - d)(s/2 + d) = (s^2/4) - d^2$, onde resulta que $d^2 = s^2/4 - p$ e, logo, $d = \sqrt{s^2/4 - p} = 1/2\sqrt{s^2 - 4p}$. Dessa forma, temos finalmente que $\alpha = s/2 - d = (s - \sqrt{s^2 - 4p})/2$ e $\beta = s/2 + d = (s + \sqrt{s^2 - 4p})/2$ são raízes da equação do segundo grau.

Agora que sabemos como encontrar as raízes de uma equação do segundo grau, uma vez conhecidas sua soma e produto, podemos retornar a equação geral e fazer algumas substituições. Podemos reescrever a equação do segundo grau como $ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 - sx + p)$ donde $s = -b/a$ e $p = c/a$. Substituindo as expressões $s = -b/a$ e $p = c/a$ nas fórmulas para encontrar as raízes da equação do segundo grau ($\alpha = (s - \sqrt{s^2 - 4p})/2$ e $\beta = (s + \sqrt{s^2 - 4p})/2$) resulta em $\alpha = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ e $\beta = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$.

É importante destacar que o número $\Delta = b^2 - 4ac$ costuma ser chamado de *discriminante* da equação do segundo grau e seu sinal fornece informações sobre a existência de possíveis raízes reais. Com efeito, se $\Delta > 0$ então a equação possui duas raízes reais e distintas; por outro lado, se $\Delta < 0$ então a equação não possui raízes reais; e no caso em que $\Delta = 0$, tem-se que a equação possui apenas uma raiz real $\alpha = \beta = -b/2a$.

Exemplo: Carlos, dispondo de 28m de cerca, conseguiu construir um cercado retangular com área medindo 48m^2, onde utilizou o seu muro como um dos lados do cercado. Descubra quais as medidas dos lados desse cercado.

Figura 2 – Modelo matemático do cercado



Fonte: Os autores.

Comecemos denotando por x a medida dos lados do cercado que tocam perpendicularmente o muro. Assim, o lado que sobra mede $28 - 2x$. Como a área do cercado mede 48m^2, deve-se ter $x(28 - 2x) = 48$, o que nos fornece a equação do segundo grau $2x^2 - 28x + 48 = 0$. Fazendo uma mera simplificação obtemos a equação equivalente $x^2 - 14x + 24 = 0$. Simplesmente observando a equação vemos que as raízes são $\alpha = 2$ e $\beta = 12$, uma vez que são os números cuja soma vale 14 e produto 24. Portanto, o cercado de

Carlos pode ter as seguintes medidas: $2m\ x\ 24m$ (no caso em que $\alpha = 2$) ou $12m\ x\ 4m$ (no caso em que $\beta = 12$).

Na seção seguinte propomos alguns problemas em que se aplicam o conceito de equação do segundo grau.

3.2 Seção de problemas

1- (LIMA et al., 2013) Dentre os triângulos de base e perímetros fixados, prove que o isósceles tem a maior área.

2- (LIMA et al., 2013) Se, dentre todos os triângulos com o mesmo perímetro $2p$, T é o de maior área, prove que T é equilátero.

3- (LIMA et al., 2013) Um cãozinho está a 10m de um balão pousado no solo. O cão começa a correr em direção ao balão no mesmo instante em que este se desprende do solo e inicia uma ascensão vertical. Se o cão corre com velocidade 2m/s e o balão ascende com velocidade 1m/s, qual é a distância mínima entre o cão e o balão? Quantos segundos após o início da corrida essa distância é mínima?

4- (LIMA et al., 2013) A preço $p\ (0 \leq p \leq 200)$, uma indústria consegue vender $1000 - 5p$ artigos por semana. O custo de produção de x artigos é $200 + 20x$. Determine p e o nível da produção semanal para que o lucro da indústria seja máximo.

5- (LIMA et al., 2013) A R$ 30,00 o ingresso, os concertos de uma banda atraem 500 espectadores. Se cada variação de R$ 1,00 no preço do ingresso faz variar o público em 40 espectadores, qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima?

6- (LIMA et al., 2013) Três homens, A, B e C, trabalhando juntos, realizam uma tarefa em x horas. Se trabalhassem sozinhos, A executaria a tarefa em x+1 horas; B, em x+6 horas; C, em 2x horas. Calcule x.

3 REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **Temas e problemas elementares**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.